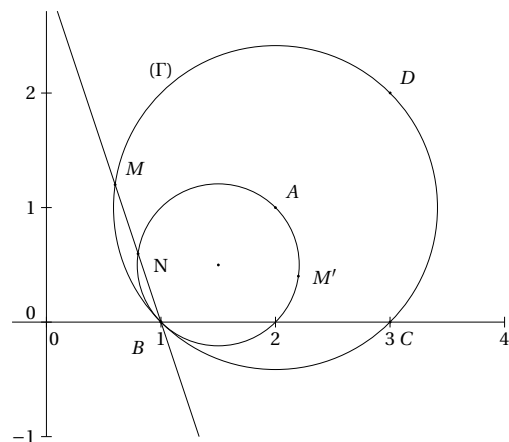


Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.



1.

2. (a) Soit le point A d'abscisse $z_A = 2 + i$ et le cercle (Γ) de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.
Alors, (Γ) a pour équation :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$$

Pour déterminer les abscisses des points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O; \vec{u})$, résolvons le système :

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + (-1)^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 + 1 = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x - 2 = 1 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x - 2 = -1 \\ y = 0 \end{cases}$$

Ainsi les points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O; \vec{u})$ ont pour coordonnées $(1; 0)$ et $(3; 0)$.

- (b) On désigne par B et C les points d'abscisses respectives $z_B = 1$ et $z_C = 3$. Alors d'après la question précédente B et C sont les points d'intersection de (Γ) et de l'axe $(O; \vec{u})$.
Comme D est le point diamétralement opposé au point B sur le cercle (Γ) , alors D est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport -1 donc son abscisse z_D vérifie :

$$z_D = -(z_B - z_A) + z_A = 2z_A - z_B = 2(2 + i) - 1 = 3 + 2i$$

3. Soit M le point d'abscisse $\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i$.

(a)

$$\begin{aligned} \frac{z_D - z_M}{z_B - z_M} &= \frac{3 + 2i - (\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i)}{1 - (\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i)} \\ &= \frac{12 + 4i}{2 - 6i} = \frac{6 + 2i}{1 - 3i} \\ &= \frac{(6 + 2i)(1 + 3i)}{1^2 + (-3)^2} = 2i \end{aligned}$$

(b) Or

$$\arg\left(\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}\right) = (\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MD})$$

Et,

$$\arg\left(\frac{z_D - z_M}{z_B - z_M}\right) = \arg[2i] = \frac{\pi}{2}$$

Donc,

$$(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{MD}) = \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, le point M appartient au cercle de diamètre [BD], c'est à dire (Γ') .

4. On note (Γ') le cercle de diamètre [AB].

La droite (BM) recoupe le cercle (Γ') en un point N.

- (a) Comme M appartient au cercle de diamètre [BD], alors $(BM) \perp (MD)$.
Comme N appartient au cercle de diamètre [NA], alors $(BN) \perp (NA)$.
Mais, $(BN) = (BM)$, donc (MD) et (NA) sont perpendiculaires à (BN) , donc les droites (DM) et (AN) sont parallèles.
(b) Puisque B, N et M sont alignés, B, A et D aussi, et les droites (DM) et (AN) sont parallèles, alors on est dans une configuration de Thalès, donc puisque $BA = \frac{1}{2}BD$ alors

$$\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM}$$

Ainsi N est le milieu de [BM] et a pour abscisse :

$$z_N = \frac{1}{2}(z_B + z_M) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{5} + \frac{6}{5}i\right) = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$$

5. On désigne par M' l'image du point M par la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

(a) L'abscisse du point M' est :

$$z_{M'} = e^{-\frac{\pi}{2}}(z_M - z_B) + z_B = -i\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}i - 1\right) + 1 = \frac{11}{5} + \frac{2}{5}i$$

(b) Soit I le milieu de [AB], alors I a pour abscisse :

$$z_I = \frac{1}{2}(z_A + z_B) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$

Et

$$IM' = |z_{M'} - z_I| = \left|\frac{11}{5} + \frac{2}{5}i - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Or le rayon de (Γ') est $\frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc le point M' appartient au cercle (Γ') .