Colinéarité de deux vecteurs

d'après *Yvan Monka – Académie de Strasbourg* – *www.maths-et-tiques.fr*

I. Notion de colinéarité

1. Définition

Définition :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque :
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan car ..

Exemple : Supposons que $\vec{v} = -3\vec{u}$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Méthode : Démontrer que des vecteurs sont colinéaires
Regarder la **Vidéo** **https://youtu.be/FjUbd9Pbhmg** **et répondre à la question:**

On donne $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit un vecteur $\vec{v}$ tel que $-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$.
Démontrons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Savoir tracer des points :

Révisions : Aller sur mathenpoche :
https://mathenpoche.sesamath.net/?page=seconde#seconde_3_3_4_sesabibli/599c1746b4649c7d956f616e
Puis https://mathenpoche.sesamath.net/?page=seconde#seconde_3_3_4_sesabibli/599c184bb4649c7d956f616f

3. Applications :

Propriétés :

1) A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan.
Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

2) Dire que les points distincts A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

II) Critère de colinéarité

Propriété :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $xy' - yx' = 0$.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/VKMrzaiPtw4

- Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
- Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.

Dire que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

x	x'
y	y'

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx' = 0$.

Réciproquement, si $xy' - yx' = 0$.

Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que $x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx' = 0$ s'écrit : $yx' = xy'$.

Soit : $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$.

Comme on a déjà $x = kx'$, on en déduit que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

Regarder la **Vidéo** https://youtu.be/eX-_639Pfw8 **et répondre aux questions :**

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -12 \\ 21 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 15 \\ -7 \end{pmatrix}$

a)

b)

2) Déterminant de deux vecteurs

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note : $det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x\,y' - yx'$.

Propriété :

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det(\vec{u};\vec{v}) = 0$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant.

Regarder la **Vidéo** **https://youtu.be/MeHOuwy81-8** **et répondre aux questions :**

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ -15 \end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 11 \\ 23 \end{pmatrix}$

a)

b)

3) Applications

Méthode : Appliquer la colinéarité

Regarder les **Vidéo** **https://youtu.be/hp8v6YAQQRI** et **https://youtu.be/dZ81uKVDGpE** **puis répondre aux questions :**

On considère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.

Soit A$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et E$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.